



Різницю $F(b) - F(a)$ називають *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»).

Під час обчислення різниці $F(b) - F(a)$ можна брати будь-яку з первісних для функції $f(x)$, які в загальному вигляді записують $F(x) + C$. Але $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. Тому прийнято застосовувати ту первісну, для якої $C = 0$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ї називають «формулою Ньютона-Лейбніца».

АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛА ЗА ФОРМУЛОЮ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА

- 1) знайти будь-яку первісну F функції f на відрізку $[a; b]$;
- 2) обчислити значення первісної F у точках $x=b$ та $x=a$;
- 3) знайти різницю $F(b) - F(a)$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} - \left(-\cos \frac{\pi}{4}\right) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Наприклад. Обчислити інтеграли.

$$a) \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4};$$

$$б) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1;$$

$$в) \int_{-2}^0 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-2}^0 = \left(\frac{0^3}{3} + 0 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2 \right) = \frac{8}{3} + 2 = 4\frac{2}{3};$$

$$г) \int_0^{\pi} 2 \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\pi} = -2 \cos \pi + 2 \cos 0 = 2 + 2 = 4.$$

Обчисліть інтеграли:

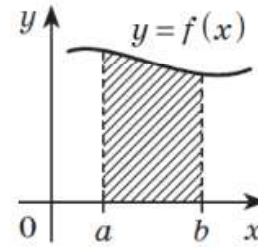
$$\begin{aligned} 3) \int_{-1}^2 (x^3 + 5) dx &= \int_{-1}^2 x^3 dx + 5 \int_{-1}^2 dx = \left(\frac{x^4}{4} + 5x \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left(\frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right) + 5(2 - (-1)) = \\ &= \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) + 15 = \frac{15}{4} + 15 = \\ &= 3\frac{3}{4} + 15 = 18\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, C – довільна стала
0	C
1	$x + C$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1. Криволінійна трапеція.

Криволінійною трапецією називається фігура, обмежена графіком безперервної функції $y = f(x)$, що не змінює знак на проміжку $[a; b]$, прямими $x = a$ і $x = b$ і проміжком $[a; b]$ (рис. 2).



Справедливою є така **теорема**: площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком безперервної й невід'ємної на проміжку $[a; b]$ функції $f(x)$, дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.



Значення виразу $F(b) - F(a)$ записують і так: $F(x) \Big|_a^b$.

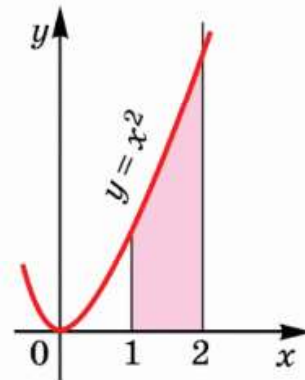
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЙОГО ФІЗИЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

Задача 2. Обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) = x^2$ та прямими $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Розв'язання. Для функції $f(x) = x^2$ однією з первісних є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$

Тоді шукана площа

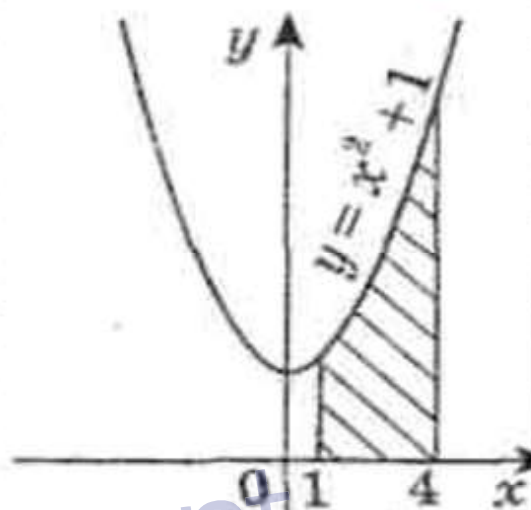
$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$



Завдання:

Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції та прямими

$$y = 0, x = 1, x = 4$$

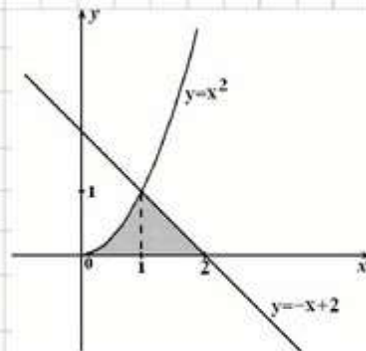


Розв'язання

$$S = \int_1^4 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) = 24 (\text{кв.од.})$$

Задача. Обчисліть площу фігури за даними, поданими на рисунку.



Розв'язання

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x+2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + \left((-2+4) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) \right) = \frac{1}{3} + 2 - 1\frac{1}{2} = \frac{5}{6} (\text{кв.од.}).$$

Відповідь. $\frac{5}{6}$ кв.од.